XIV Réduction des endomorphismes des espaces euclidiens

XIV.A Questions de cours :

1) Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, alors son orthogonal est également stable.
2) Théorème spectral
3) Montrer que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$.

XIV.B Exercices :

Exercice 1: **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tAA$ est diagonalisable et montrer que ses valeurs propres sont réelles positives.

Exercice 2: ** Théorème de Courant-Fischer**

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres rangées par ordre croissant. Soit également $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés, i.e $f(e_k) = \lambda_k e_k$.
On désigne par V_k le sous-espace $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_k)$, par W_k le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(e_k, \ldots, e_n)$ et par $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \in \{1, \ldots, n\}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non-nul,

$$R_A(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

1. Montrer que $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} R_A(x)$ et que $\lambda_n = \max_{x \neq 0} R_A(x)$.
2. Montrer que $\max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_k$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Vérifier que $V \cap W_k \neq \{0\}$. En déduire que $\max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k$.
4. Déduire des questions précédentes le théorème de Courant-Fischer :

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x).$$

Exercice 3: ** Décomposition polaire**

1. Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$
   (a) Démontrer qu'il existe $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$.
   (b) Démontrer que T est unique en considérant les sous-espaces propres des endomorphismes canoniquement associés à S et T
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$
   (a) Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique couple $(O; S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Exercice 4: **

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On pose

$$k = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|.$$

Vérifier

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq k\|x\|.$$

En déduire que $\|u\| = k$

Exercice 5: *** Composantes connexes de $Gl_n(\mathbb{R})$ et $Gl_n(\mathbb{C})$

Déterminer les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$, de $GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6: **** Une première étape pour la simplicité de $SO(3)$.

1. (Cours) Montrer que tout élément de $SO(3)$ est $O(3)$-semblable à une matrice de la forme :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
2. En déduire que (le groupe) $SO(3)$ est connexe par arcs.
3. Soit $h \in H$ un élément non trivial. On considère l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} SO(3) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \operatorname{Tr}([g,h]) \end{array}$$
Montrer que $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ pour un certain a que l'on ne déterminera ps

Exercice 7: **

Soit a, b, c trois réels. On pose $S = a+b+c$ et $\sigma = ab+bc+ac$ et $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

1. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$
2. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Exercice 8: **** générateurs de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$

1. Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.
(Indication : montrer que toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.)
2. En déduire que $\mathcal{SO}(E)$ est engendré par les retournements.

Exercice 9: *** Déterminant de Gram

Soit E un espace euclidien de dimension n. Si $(x_1, \dots, x_m)$ est une famille de E, on pose

$$G(x_1, \dots, x_m) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq m} = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

la matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_m)$. On note $|G(x_1, \dots, x_m)|$ le déterminant de la matrice de Gram $G(x_1, \dots, x_m)$.

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_m)$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.
2. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E, et $(x_1, \dots, x_m) \in F^m$. Soit $x \in F^\perp$. Montrer que
$$|G(x, x_1, \dots, x_m)| = ||x||^2 |G(x_1, \dots, x_m)|.$$
3. En déduire que si $(x_1, \dots, x_m)$ est une base de F, et $x \in E$, alors
$$d(x, F)^2 = \frac{|G(x, x_1, \dots, x_m)|}{|G(x_1, \dots, x_m)|}.$$